12. 3. KLASYCZNA DEFINICJA PRAWDOPODOBIEŃSTWA

Klasyczna definicja prawdopodobieństwa

Jeżeli Ω jest skończonym zbiorem zdarzeń elementarnych jednakowo prawdopodobnych i $A \subset \Omega$, to liczbę $P(A) = \dfrac{\overline{\overline{A}}}{\overline{\overline{\Omega}}}$ nazywamy <u>prawdopodobieństwem</u> zdarzenia A

$\overline{\overline{A}}$ - moc zdarzenia A (liczba zdarzeń elementarnych sprzyjających zdarzeniu A)

$\overline{\overline{\Omega}}$ - moc przestrzeni Ω (liczba wszystkich zdarzeń elementarnych)

<u>Przykład 12.3.1.</u> Rzucamy trzy razy monetą. Jakie jest prawdopodobieństwo zdarzenia:
A - liczba otrzymanych orłów jest większa od liczby otrzymanych reszek,

Rozwiązanie	Komentarz
$\Omega = \{(OOO),(OOR),(ORO),(ROO)(RRO),(ROR)(ORR),(RRR)\}$ $\overline{\overline{\Omega}} = 8$	Wypisujemy przestrzeń zdarzeń elementarnych i określamy moc przestrzeni Ω
$A = \{(OOO),(OOR),(ORO),(ROO)\}$ $\overline{\overline{A}} = 4$	Wypisujemy zdarzenia elementarne sprzyjające zdarzeniu A i określamy moc zdarzenia A.
$P(A) = \dfrac{\overline{\overline{A}}}{\overline{\overline{\Omega}}} = \dfrac{4}{8} = \dfrac{1}{2}$	Obliczamy prawdopodobieństwo zdarzenia A , korzystając ze wzoru: $P(A) = \dfrac{\overline{\overline{A}}}{\overline{\overline{\Omega}}}$

<u>Przykład 12.3.2.</u> Losujemy jedną kartę z talii 52 kart. Jakie jest prawdopodobieństwo wyciągnięcia asa lub króla ?

Rozwiązanie	Komentarz
$\overline{\overline{\Omega}} = 52$	Określamy moc przestrzeni Ω. Losując jedną kartę z talii 52 kart możemy to zrobić na 52 sposoby.
$A = \{$ A♠, A♣, A♥, A♦, K♠, K♣,K♥,K♦ $\}$ $\overline{\overline{A}} = 8$	Wypisujemy zdarzenia elementarne sprzyjające zdarzeniu A i określamy moc zdarzenia A.
$P(A) = \dfrac{\overline{\overline{A}}}{\overline{\overline{\Omega}}} = \dfrac{8}{52} = \dfrac{2}{13}$	Obliczamy prawdopodobieństwo zdarzenia A , korzystając ze wzoru: $P(A) = \dfrac{\overline{\overline{A}}}{\overline{\overline{\Omega}}}$

<u>Przykład 12.3.3.</u> Z talii 52 kart losujemy dwie karty. Jakie jest prawdopodobieństwo wylosowania dwóch kierów?

Rozwiązanie	**Komentarz**
$\overline{\overline{\Omega}} = \frac{52 \cdot 51}{2} = \frac{2652}{2} = 1326$	Określamy moc przestrzeni Ω, czyli obliczamy na ile sposobów możemy wylosować dwie karty z talii 52 karty. Pierwszą kartę możemy wylosować na 52 sposoby, drugą kartę na 51 sposobów, czyli dwie kart na $52 \cdot 51 = 2652$ sposobów. Ponieważ przy jednoczesnym losowaniu dwóch kart nie jest ważna kolejność ustawienia kul, to otrzymany wynik musimy podzielić przez liczbę ustawień dwóch kart. Dwie karty można ustawić na dwa sposoby.
$\overline{\overline{A}} = \frac{13 \cdot 12}{2} = \frac{156}{2} = 78$	Określamy moc zdarzenia A, czyli obliczamy na ile sposobów możemy wylosować dwa kiery z talii 52 karty. W talii 52 karty jest 13 kierów. Zatem pierwszego kiera możemy wylosować na 13 sposobów, drugiego kiera na 12 sposobów, czyli dwa kiery na $13 \cdot 12 = 156$ sposobów. Ponieważ przy jednoczesnym losowaniu dwóch kart nie jest ważna kolejność ustawienia kul, to otrzymany wynik musimy podzielić przez liczbę ustawień dwóch kart. Dwie karty można ustawić na dwa sposoby.
$P(A) = \frac{\overline{\overline{A}}}{\overline{\overline{\Omega}}} = \frac{78}{1326} = \frac{1}{17}$	Obliczamy prawdopodobieństwo zdarzenia A , korzystając ze wzoru: $P(A) = \frac{\overline{\overline{A}}}{\overline{\overline{\Omega}}}$

<u>Przykład 12.3.4.</u> Windą zatrzymującą się na 6 piętrach, jadą 4 osoby. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że każda osoba wysiądzie na innym piętrze ?

Rozwiązanie	**Komentarz**
$\overline{\overline{\Omega}} = 6 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 6 = 1296$	Określamy moc przestrzeni Ω, czyli obliczamy na ile sposobów 4 osoby mogą wysiąść na 6 piętrach. Każda osoba może wysiąść na jednym z sześciu pięter, czyli na sześć sposobów.
$\overline{\overline{A}} = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 360$	Określamy moc zdarzenia A, czyli obliczamy na ile sposobów 4 osoby mogą wysiąść na 6 różnych piętrach. Pierwsza osoba może wysiąść na 6 sposobów, druga na 5 sposobów , trzecia na 4 sposoby, czwarta na 3 sposoby, czyli 4 osoby mogą wysiąść na 6 różnych piętrach na $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 360$
$P(A) = \frac{\overline{\overline{A}}}{\overline{\overline{\Omega}}} = \frac{360}{1296} = \frac{5}{18}$	Obliczamy prawdopodobieństwo zdarzenia A , korzystając ze wzoru: $P(A) = \frac{\overline{\overline{A}}}{\overline{\overline{\Omega}}}$

Własności prawdopodobieństwa

Ω - przestrzeń zdarzeń elementarnych i $A, B \subset \Omega$

1) $0 \le P(A) \le 1$
2) $P(\emptyset) = 0 \qquad P(\Omega) = 1$
3) Jeśli $A \subset B$, to $P(A) \le P(B)$
4) $P(A') = 1 - P(A)$
5) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Przykład 12.3.5. Wiedząc, że $P(A) = \frac{1}{2}; P(B') = \frac{1}{3}; P(A \cup B) = \frac{4}{5}$ oblicz $P(A \cap B)$.

Rozwiązanie	Komentarz
$P(B') = 1 - P(B)$ $\frac{1}{3} = 1 - P(B)$ $P(B) = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$	Obliczamy prawdopodobieństwo zdarzenia B, korzystając ze wzoru $P(B') = 1 - P(B)$
$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ $\frac{4}{5} = \frac{1}{2} + \frac{2}{3} - P(A \cap B)$ $P(A \cap B) = \frac{1}{2} + \frac{2}{3} - \frac{4}{5} = \frac{15}{30} + \frac{20}{30} - \frac{24}{30} = \frac{11}{30}$	Obliczamy $P(A \cap B)$, korzystając ze wzoru $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Przykład 12.3.6. Rzucamy trzykrotnie kostką do gry . Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że przynajmniej raz otrzymamy 6 oczek ?

Rozwiązanie	Komentarz
$\overline{\overline{\Omega}} = 6 \cdot 6 \cdot 6 = 216$	Określamy moc przestrzeni Ω, czyli obliczamy ile otrzymamy wyników przy trzykrotnym rzucie kostką do gry Pierwszy rzut możemy wykonać na 6 sposobów , drugi na 6 sposobów , trzeci też na 6 sposobów, czyli trzy rzuty na $6 \cdot 6 \cdot 6 = 216$
$\overline{\overline{A'}} = 5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$	Łatwiej będzie obliczyć prawdopodobieństwo zdarzenia przeciwnego: przy trzykrotnym rzucie kostką nie wyrzucono 6 oczek. Pierwszy rzut możemy wykonać na 5 sposobów , drugi na 5 sposobów , trzeci też na 5 sposobów, czyli trzy rzuty na $5 \cdot 5 \cdot 5 = 125$
$P(A') = \frac{\overline{\overline{A'}}}{\overline{\overline{\Omega}}} = \frac{125}{216}$	Obliczamy prawdopodobieństwo zdarzenia A , korzystając ze wzoru: $P(A) = \frac{\overline{\overline{A}}}{\overline{\overline{\Omega}}}$
$P(A') = 1 - P(A)$ $\frac{125}{216} = 1 - P(A)$ $P(A) = \frac{91}{216}$	Obliczamy prawdopodobieństwo zdarzenia A, korzystając ze wzoru : $P(A') = 1 - P(A)$

Przykład 12.3.7. W pewnej grupie uczniów każdy zna język angielski lub język niemiecki. Wiadomo, że prawdopodobieństwo wylosowania z tej grupy ucznia znającego język angielski jest równe $\frac{7}{8}$, natomiast prawdopodobieństwo wylosowania ucznia znającego język niemiecki jest równe $\frac{4}{5}$. Jakie jest prawdopodobieństwo tego, że losowo wybrany uczeń zna obydwa języki ?

Rozwiązanie	Komentarz
A – wylosowano ucznia znającego język angielski N - wylosowano ucznia znającego język niemiecki **Dane:** $P(A)=\frac{7}{8}$, $P(N)=\frac{4}{5}$, $P(A\cup N)=1$ **Szukane:** $P(A\cap N)=?$	Wprowadzamy oznaczenia i przeprowadzamy analizę zadania. Szukamy prawdopodobieństwa zdarzenia $A\cap N$ - wybrany uczeń zna język angielski i język niemiecki. Ponieważ każdy uczeń zna język angielski lub język niemiecki , to zdarzenie $A\cup N$ jest zdarzeniem pewnym.
$P(A\cup N)=P(A)+P(N)-P(A\cap N)$ $1=\frac{7}{8}+\frac{4}{5}-P(A\cap B)$ $P(A\cap B)=\frac{7}{8}+\frac{4}{5}-1=\frac{35}{40}+\frac{32}{40}-\frac{40}{40}=\frac{27}{40}$	Obliczamy prawdopodobieństwo zdarzenia $A\cap N$ wykorzystując wzór : $P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)$

ĆWICZENIA

Ćwiczenie 12.3.1. (3pkt.) Pewna gra polega na rzucie monetą i kostką do gry. Wygrana polega na otrzymaniu orła i parzystej liczby oczek. Oblicz prawdopodobieństwo wygrania w tej grze.

schemat oceniania

Numer odpowiedzi	Odpowiedź	Liczba punktów
1	Podanie liczby wszystkich zdarzeń elementarnych: $\overline{\overline{\Omega}}$	1
2	Podanie liczby wyników sprzyjających zdarzeniu A: $\overline{\overline{A}}$	1
3	Podanie prawdopodobieństwa zajścia zdarzenia A: P(A)	1

Ćwiczenie 12.3.2. (3pkt.) Ze zbioru 1, 2, 3, 4 losujemy dwa razy kolejno po jednej cyfrze ze zwracaniem. Jakie jest prawdopodobieństwo wylosowania liczby parzystej za pierwszym razem.

schemat oceniania

Numer odpowiedzi	Odpowiedź	Liczba punktów
1	Podanie liczby wszystkich zdarzeń elementarnych: $\overline{\overline{\Omega}}$	1
2	Podanie liczby wyników sprzyjających zdarzeniu A: $\overline{\overline{A}}$	1
3	Podanie prawdopodobieństwa zajścia zdarzenia A: P(A)	1

Ćwiczenie 12.3.3. (5pkt.) Rzucamy dwa razy symetryczną sześcienną kostką do gry i określamy zdarzenia: A – wyrzucono dwa razy tę samą liczbę oczek,
B – suma wyrzuconych oczek jest większa od 7.
Oblicz prawdopodobieństwo sumy tych zdarzeń.

schemat oceniania

Numer odpowiedzi	Odpowiedź	Liczba punktów
1	Podanie liczby wszystkich zdarzeń elementarnych: $\overline{\overline{\Omega}}$	1
2	Podanie liczby wyników sprzyjających zdarzeniu A: $\overline{\overline{A}}$	1
3	Podanie liczby wyników sprzyjających zdarzeniu B: $\overline{\overline{B}}$	1
4	Podanie liczby wyników sprzyjających zdarzeniu $A \cup B$: $\overline{\overline{A \cup B}}$	1
5	Podanie prawdopodobieństwa sumy zdarzeń : $P(A \cup B)$	1

Ćwiczenie 12.3.4. (4pkt.) Rzucamy cztery razy monetą. Jakie jest prawdopodobieństwo, że wypadnie co najmniej raz orzeł?

schemat oceniania

Numer odpowiedzi	Odpowiedź	Liczba punktów
1	Podanie liczby wszystkich zdarzeń elementarnych: $\overline{\overline{\Omega}}$	1
2	Podanie liczby wyników sprzyjających zdarzeniu przeciwnemu A: $\overline{\overline{A'}}$	1
3	Podanie prawdopodobieństwa zdarzenia przeciwnego : $P(A')$	1
4	Podanie prawdopodobieństwa zajścia zdarzenia A: P(A)	1

<u>Ćwiczenie 12.3.5.</u> (4pkt.) Z talii 52 karty losujemy dwie karty. Oblicz prawdopodobieństwo, że co najwyżej jedna będzie pikiem.

schemat oceniania

Numer odpowiedzi	**Odpowiedź**	**Liczba punktów**
1	Podanie liczby wszystkich zdarzeń elementarnych: $\overline{\overline{\Omega}}$	1
2	Podanie liczby wyników sprzyjających zdarzeniu przeciwnemu A: $\overline{\overline{A'}}$	1
3	Podanie prawdopodobieństwa zdarzenia przeciwnego : $P(A')$	1
4	Podanie prawdopodobieństwa zajścia zdarzenia A: P(A)	1